Lista 5: Cálculo I

A. Ramos *

April 16, 2018

Abstract

Lista em constante atualização.

1. Derivação implicita;
2. Derivadas da funções inversas e derivadas de funções hiperbólicas;
3. Aplicações da derivada.

1 Exercícios

Faça do livro texto, os exercícios correspondentes aos temas desenvolvidos em aula.

2 Exercícios adicionais

2.1 Derivada paramétricas

1. Encontre a equação da reta tangente da curva $x = t^2 + 1$, e $y = 2t + t^3$ no ponto $t = -2$. *Rpta:* reta tangente: $7y + 84 = 2x - 10$.

2. Considere o movimento de uma partícula sobre a curva $y^2 = x^3$, com $y > 0$. Se a abscissa da partícula aumenta em 5 cm por segundo quando $x = 4$. Qual a taxa de variação da ordenada da partícula nesse instante? *Rpta:* $\frac{dy}{dt} = 15$ unidades por segundo.

3. Verifique que a função dada por $x(t) = \frac{1+t}{t^3}$, e $y(t) = \frac{2}{t} + \frac{3}{2t^2}$ satisfaz a relação $x(\frac{dy}{dx})^3 = 1 + \frac{dy}{dx}$.

2.2 Funções Hiperbólicas

1. Mostre que $\sinh x$ tem inversa e a inversa é $\text{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $x \in \mathbb{R}$. Faça o mesmo para as outras funções hiperbólicas.

2. Verifique que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ que (a) $cosh(x \pm y) = cosh(x)cosh(y) \pm senh(x)senh(y)$ e (b) $senh(x \pm y) = senh(x)cosh(y) \pm cosh(x)senh(y)$.

3. Mostre que
$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh(x) \pm \tanh(y)}{1 \pm \tanh(x)\tanh(y)}.$$

4. Mostre que (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = 1$; (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sinh x}{x} = 0$ e (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\tanh x}{x} = 1$.

2.3 Derivada de função inversa

1. Considere $f(x) = e^x + 2x$. Mostre que a inversa f^{-1} é derivável e se g é a inversa de f, temos que $g'(x) = \frac{1}{2+\exp(g(x))}$.

2. Se $f(x) = x^3 + x$. Mostre que (a) f tem admite função inversa e (b) calcule $(f^{-1})'(0)$.

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: `albertoramos@ufpr.br`.

2.4 Máximos, mínimos e pontos críticos

1. Qual é o ponto da curva $yx = 2$, $x > 0$, que está mais próximo ao origem.

2. Considere duas partículas A e B que se movem sobre os eixos x e eixo y respetivamente. Se a posição de A é $(\sqrt{t}, 0)$ e a posição de B é $(0, t^2 - \frac{1}{4})$, para $t \geq 0$. Encontre o instante onde a distância entre A e B seja o menor possível.

3. Considere a curva $y = 1 - x^2$, $x \in [0, 1]$. Qual a reta tangente à curva tal que a área do triângulo que ela forma com os eixos coordenados seja mínima?

4. Seja $L(x) = -x^3 + 12x^2 + 60x - 4$ o lucro de uma empresa ao vender certo determinado produto, onde x representa a quantidade do produto produzida. Determine o lucro máximo e a produção que máximiza o lucro. *Rpta:* $x = 10$, Lucro máximo $L(10)$

2.5 Teorema de Rolle e Teorema de Valor Médio

1. Mostre que a equação $f(x) = x^7 + 5x^3 + x - 7$ tem uma única solução.

2. Considere a função $f(x) = e^x - \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$, com $x > 0$. Então:

   (a) Dado $y \in \mathbb{R}$. Mostre que existe uma única solução de $e^x - x^{-1} - x/2 = y$. Conclua que f tem inversa.

   (b) Verifique que $|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leq 2|x - y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Seja $f(x) = 3x + \cos x$. Mostre que (a) f é bijetora e (b) calcule $f^{-1}(1)$.

4. Use o teorema de valor médio para mostrar as seguintes desigualdades:

   (a) $\ln(1 + x) < x$, para todo $x \neq -1$.

   (b) $|\ln \frac{x}{y}| \leq |x - y|$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, com a ≥ 1, $b \geq 1$.

   (c) $x - y \leq e^x - e^y$, para todo y, x com $x \geq y \geq 0$.

   (d) $a^a(b - a) < b^b - a^a$, para a, b com $1 \leq a < b$.

5. Podemos usar o teorema do valor médio na função $f(x) = \frac{2x-1}{3x-4}$ no intervalo $[1, 2]$? Caso afirmativo, encontre os valores que verifiquem. *Rpta:* Não se cumple as condições do teorema do valor médio.

6. Mostre as identidades

   (a) $\arcsin(1 - 2y^2) = 2\arcsin(y)$, para $y \in (-1, 1)$.

   (b) $\arcsin \frac{x-1}{x+1} + \frac{\pi}{2} = 2\arctan\sqrt{x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.